CONCOURS COMMUN MINES, PONTS, TELECOM., SUP.AERO,.. 1975

OPTION M - 1ERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

(DUREE : 4 HEURES)

Cette épreuve spécifique aux candidats de l'option M comporte 3 pages.

NOTATIONS

(a) Dans tout le problème, on donne une application continue g du segment [0,1] de $\mathbb{R}$ dans lui-même qui vérifie : $g(0) = 0$; $g(1) = 1$; $(\forall x \in]0,1[)\ (g(x) \neq x)$.

(b) On désigne par E l'espace vectoriel réel des applications continues de [0,1] dans $\mathbb{R}$; on note E^+ l'ensemble des éléments f de E qui vérifient :

$$(\forall x \in [0,1])\ (f(x) \geqslant 0) .$$

(c) On rappelle que la notation inf (x,y), pour x,y réels, désigne le plus petit des deux nombres x et y, et que l'on a : $\inf(x,y) = \frac{1}{2}[x+y-|x-y|]$.

PARTIE I

Propriétés algébriques des endomorphismes u_g et v_g

1°) Soit f un élément de E. On note $u_g(f)$ et $v_g(f)$ les applications de [0,1] dans $\mathbb{R}$, dont la valeur en un point a quelconque de [0,1] est donnée par :

$$u_g(f)(a) = \int_0^1 \inf[x, g(a)]\, f(x)\, dx \quad ; \quad v_g(f)(a) = \int_0^1 \inf[a, g(x)]\, f(x)\, dx .$$

Démontrer, sans aucune référence à des théorèmes généraux concernant la continuité des fonctions du type $a \longrightarrow \int_\alpha^\beta \phi(a,t)\, dt$, que les applications $u_g(f)$ et $v_g(f)$ sont continues.

2°) Démontrer que les applications $u_g : f \longrightarrow u_g(f)$, et $v_g : f \longrightarrow v_g(f)$ sont des endomorphismes vectoriels de E ; démontrer que u_g est injectif ; par un exemple simple, montrer qu'il n'en est pas de même en général pour v_g .

3°) On suppose, dans cette question exclusivement, que l'application g est strictement croissante ; montrer que l'endomorphisme v_g est injectif.

4°) En supposant g dérivable, montrer que l'endomorphisme u_g n'est pas surjectif.

PARTIE II

Propriétés analytiques des endomorphismes u_g et v_g

On suppose dans tout ce qui suit que l'application g est strictement croissante, dérivable en 0, et qu'il existe x_0 dans $]0,1[$ tel que : $g(x_0) < x_0$.

1°) Montrer l'inégalité : $0 \leqslant g'(0) \leqslant 1$. On suppose désormais $g'(0) > 0$.

2°) Si f appartient à E^+ , si h appartient à E , montrer :

$$\sup_{a\in[0,1]} u_g(f)(a) = \int_0^1 x\,f(x)\,dx \quad ; \quad \sup_{a\in[0,1]} |u_g(h)(a)| \leqslant \int_0^1 x\,|h(x)|\,dx \quad ; \quad \ldots.$$

$$\sup_{a\in[0,1]} |v_g(h)(a)| \leqslant \int_0^1 g(x)\,|h(x)|\,dx .$$

3°) Si f appartient à E^+, si a appartient à [0,1], montrer :

$$u_g(f)(a) \leqslant \int_0^1 \inf(x,a)\,f(x)\,dx \quad ; \quad v_g(f)(a) \leqslant \int_0^1 \inf(x,a)\,f(x)\,dx .$$

PARTIE III

Propriétés topologiques des endomorphismes u_g et v_g

Si f appartient à E, on pose :

$$n_g(f) = \sup_{a\in[0,1]} u_g(|f|)(a) \quad ; \quad N_g(f) = \sup_{a\in[0,1]} v_g(|f|)(a) .$$

($|f|$ désigne comme d'habitude l'application : $x \longrightarrow |f(x)|$ de [0,1] dans $\mathbb{R}$).

1°) Démontrer que les applications n_g et N_g ainsi définies de E dans l'ensemble des réels positifs ou nul , sont des normes.

2°) Montrer qu'il existe un élément α de]0,1] tel que :

$$(\forall x\in[0,1])\ (\alpha x \leqslant g(x)) .$$

3°) En déduire, pour f dans E^+, et a dans [0,1], les inégalités :

$$u_g(f)(a) \geqslant \int_0^1 \inf(x, a\alpha)\,f(x)\,dx \quad ; \quad v_g(f)(a) \geqslant \int_0^1 \inf(\alpha x,a)\,f(x)\,dx .$$

4°) Montrer, pour f dans E : $\alpha \int_0^1 x\,|f(x)|\,dx \leqslant N_g(f) \leqslant \int_0^1 x\,|f(x)|\,dx$.

Les normes n_g et N_g sont-elles équivalentes ?

PARTIE IV

Propriétés topologiques de E

Pour n entier $\geqslant 3$, on définit l'application f_n de [0,1] dans $\mathbb{R}$ de la façon suivante :

$f_n(x) = 0$ si x appartient à $[\,0\,,\,\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\,[$

$f_n(x) = \frac{nx}{2} + \frac{2-n}{4}$ si x appartient à $[\,\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\,,\,\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\,[$

$f_n(x) = 1$ si x appartient à $[\,\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\,,\,1]$

1°) Démontrer que la suite f_n est une suite de Cauchy dans E pour les normes n_g et N_g.

2°) Soit f_0 l'application de [0,1] dans $\mathbb{R}$ définie de la façon suivante :

$$\begin{cases} f_0(x) = 0 & \text{si } x \text{ appartient à } [0, \frac{1}{2}[\\ f_0(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} & \\ f_0(x) = 1 & \text{si } x \text{ appartient à }]\frac{1}{2}, 1] \end{cases}.$$

On pose : $E' = E \cup \{f_0\}$, et l'on définit une application d de $(E')^2$ dans l'ensemble des réels positifs ou nul par les égalités :

$$\begin{cases} d(f,g) = \int_0^1 x\,|f(x) - g(x)|\,dx & \text{si f et g appartiennent à E} \\ d(f,f_0) = d(f_0,f) = \int_0^1 x\,|f_0(x) - f(x)|\,dx & \text{si f appartient à E} \\ d(f_0,f_0) = 0 & \end{cases}$$

Montrer que le couple(E',d) est un espace métrique, et que la suite f_n tend vers f_0 dans (E',d) lorsque n tend vers $+\infty$.

En déduire que la suite f_n ne converge dans aucun des espaces normés (E,n_g), (E,N_g).

3°) On considère l'application p_0 de E dans l'ensemble des réels positifs ou nul ainsi définie :

$$p_0(f) = \int_0^1 |f(x)|\,dx .$$

Montrer que les normes p_0 et n_g sur E ne sont pas équivalentes.
(A cet effet, on pourra considérer les éléments $\phi_{\delta,\varepsilon}$ de E définis, pour ε dans $]0,1[$, δ dans $\mathbb{R}$, ainsi : $\phi_{\delta,\varepsilon}(x) = x^\delta$ si x appartient à $[\varepsilon,1]$; $\phi_{\delta,\varepsilon}(x) = \varepsilon^\delta$ si x appartient à $[0,\varepsilon[$, et estimer les réels $p_0(\phi_{\delta,\varepsilon})$; $n_g(\phi_{\delta,\varepsilon})$).

°°°°°
°°°°°

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail